

Мурашкин Е. В.
E. V. Murashkin

УСЛОВИЯ АТЕРМИЧНОСТИ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН ДЛЯ ПОЛУИЗОТРОПНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД

ATHERMALITY CONDITIONS OF LONGITUDINAL WAVES FOR SEMI-ISOTROPIC THERMOELASTIC MICROPOLAR MEDIA

Мурашкин Евгений Валерьевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук (Россия, Москва); 119526, Россия, Москва, пр. Вернадского, д. 101, корп. 1. E-mail: murashkin@ipmnet.ru.

Evgenii V. Murashkin – PhD in Physics and Mathematics, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS (Russia, Moscow); 119526, Russia, Moscow, Prospect Vernadskogo, 101-1. E-mail: murashkin@ipmnet.ru.

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются процессы распространения связанных тепловых и атермических волн инкремента температуры, трансляционных и спинорных перемещений. Особое внимание уделено условиям атермичности волновых поверхностей слабых разрывов, распространяющихся по полуизотропной термоупругой микрополярной среде. С этой целью используются геометрические и кинематические условия Адамара – Томаса. Изучаются слабые разрывы решений связанной системы уравнений в частных производных полуизотропной микрополярной термоупругости. Найдены скорости распространяющихся волновых поверхностей трансляционных и спинорных перемещений. Получены соотношения между амплитудными факторами слабого разрыва температурного поля и векторами разрывов трансляционных и спинорных смещений, характеризующих атермические свойства исследуемых связанных термоупругих волн.

Summary. The present paper is devoted to the processes of propagation of coupled thermal and athermal waves of temperature increment, translational and spinor displacements. Particular attention is paid to the conditions of athermality of wave surfaces of weak discontinuities propagating in a semi-isotropic thermoelastic micropolar medium. For this aim, the geometric and kinematic Hadamard–Thomas conditions are used. Weak discontinuities of solutions of the coupled system of partial differential equations of semi-isotropic micropolar thermoelasticity are studied. The velocities of propagating wave surfaces of translational and spinor displacements are found. The relationships between the amplitude factors of a weak discontinuity of the temperature field and the vectors of discontinuities of translational and spinor displacements characterizing the athermal properties of the coupled thermoelastic waves are obtained.

Ключевые слова: микрополярная термоупругость, полуизотропное тело, трансляционное перемещение, спинорное перемещение, продольная волна, поперечная волна, слабый разрыв.

Key words: micropolar thermoelasticity, semi-isotropic solid, translational displacement, spinor displacement, longitudinal wave, transverse wave, weak discontinuity.

Настоящее исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

УДК 539.3

Введение. Проблемы распространяющихся поверхностей слабых разрывов физических полей являются актуальными и давно привлекают внимание исследователей-механиков [1–5]. Однако современные конструкционные био- и метаматериалы обладают сложной микроструктурой, а их определяющие параметры проявляют чувствительность к зеркальным отражениям и инверсиям трёхмерного пространства [6]. Для моделирования термомеханического отклика таких материалов приходится использовать модели микрополярной термоупругости [1;

7–10]. При исследовании волновых процессов полезной оказывается теория Адамара – Томаса [11], которая успешно применялась при исследовании распространения слабых разрывов трансляционных и спинорных перемещений по изотропным микрополярным средам [12–15].

В настоящей работе особое внимание уделяется процессам распространения атермических волн, т. е. волновых поверхностей, при распространении которых не происходит выделения тепла.

Настоящая статья в основном использует результаты, терминологию и понятия, подробно изложенные в предыдущих публикациях [7–10, 12–15].

Продольные и поперечные волны, распространяющиеся в полуизотропной микрополярной термоупругой среде. Система уравнений в частных производных, справедливая для любой криволинейной системы координат в трёхмерном пространстве, может быть выписана в векторной форме следующим образом [7–10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+c_1)\nabla\cdot\nabla\mathbf{u}+(1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+2c_1\nabla\times\boldsymbol{\phi}+ \\ +Lc_4'\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}+Lc_5'\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{\phi}-2\alpha_*\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla\theta=\rho G^{-1}\partial_{\cdot}^2\mathbf{u}, \\ (1+c_2)\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{\phi}+(1-c_2+2c_3)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}+L^{-1}c_4'\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+ \\ +L^{-1}c_5'\nabla\cdot\nabla\mathbf{u}+L^{-1}c_6'\nabla\times\boldsymbol{\phi}-2L^{-2}c_1(2\boldsymbol{\phi}-\nabla\times\mathbf{u})-2\beta_*\nabla\theta=\rho\mathcal{I}G^{-1}L^{-2}\partial_{\cdot}^2\boldsymbol{\phi}, \\ \nabla\cdot\nabla\theta-C\lambda^{-1}\partial_{\cdot}\theta-2G\lambda^{-1}\alpha_*\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla\cdot\partial_{\cdot}\mathbf{u}-2G\lambda^{-1}L^2\beta_*\nabla\cdot\partial_{\cdot}\boldsymbol{\phi}=0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\mathbf{u}$ – вектор трансляционных перемещений; $\boldsymbol{\phi}$ – вектор спинорных перемещений; G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; L – характерная микродлина; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – не имеющие физической размерности псевдоскаляры; α_* – коэффициент линейного теплового расширения; β_* – коэффициент теплового искажения; ∇ – оператор ковариантного дифференцирования; $\partial_{\cdot}$ – производная по времени. В (1) реализована следующая замена: $C\theta_0^{-1}\rightarrow C, \lambda\theta_0^{-1}\rightarrow\lambda$.

Система уравнений в частных производных (1), записанная в терминах вектора трансляционных перемещений $\mathbf{u}$, вектора спинорных перемещений $\boldsymbol{\phi}$ и инкремента температуры θ , служит основой для изучения сильных и слабых разрывов в микрополярной полуизотропной среде, а также волновых процессов, характеризующихся распространением зеркальных волновых мод трансляционных и спинорных перемещений [16].

Исследуем процессы распространения продольных и поперечных волн в полуизотропной микрополярной термоупругой среде. Заметим, что высшим порядком частных производных в системе уравнений в частных производных (1) является второй. Волновой фронт (волновая поверхность) Σ слабых разрывов трансляционных смещений $\mathbf{u}$, спинорных смещений $\boldsymbol{\phi}$ и приращения температуры θ распространяется в трёхмерном пространстве с нормальной скоростью V . Тогда геометрические и кинематические условия совместности второго порядка типа Адамара – Томаса представляются в виде [11]

$$\left\{ \begin{array}{l} [\nabla\otimes\nabla\otimes\mathbf{u}]=\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes\mathbf{A}, \quad [\nabla\otimes\nabla\otimes\boldsymbol{\phi}]=\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes\boldsymbol{\Phi}, \\ [\nabla\otimes\partial_{\cdot}\mathbf{u}]=-V\mathbf{n}\otimes\mathbf{A}, \quad [\nabla\otimes\partial_{\cdot}\boldsymbol{\phi}]=-V\mathbf{n}\otimes\mathbf{S}, \\ [\partial_{\cdot}^2\mathbf{u}]=V^2\mathbf{A}, \quad [\partial_{\cdot}^2\boldsymbol{\phi}]=V^2\mathbf{S}, \quad [\nabla\otimes\nabla\theta]=B\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}, \end{array} \right. \quad (2)$$

где квадратные скобки обозначают скачок физического поля при прохождении через поверхность слабого разрыва; $B, \mathbf{A}, \mathbf{S}$ – амплитуды физических полей, определённых на волновой поверхности. Отметим, что следующие условия $B=0, \mathbf{A}=\mathbf{0}, \mathbf{S}=\mathbf{0}$ не могут быть выполнены

одновременно ни в одной точке поверхности, если поверхность является поверхностью слабого разрыва. Подставляя (2) в систему уравнений в частных производных (1), можно получить следующие соотношения, связывающие скачки частных производных второго порядка от трансляционных $\mathbf{u}$, спинорных ϕ перемещений и инкремента температуры θ при переходе через волновую поверхность Σ :

$$\begin{cases} [(1+c_1)-\rho G^{-1}V^2]\mathbf{A} + \left(\frac{1}{1-2\nu} - c_1\right)\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + Lc'_4\mathbf{S} + Lc'_5\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) = 0, \\ [(1+c_2)-\rho \Im G^{-1}L^{-2}V^2]\mathbf{S} + (1-c_2+2c_3)\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) + L^{-1}c'_4\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + L^{-1}c'_5\mathbf{A} = 0, \\ B + 2G\lambda^{-1}\alpha_*\frac{1+\nu}{1-2\nu}V(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + 2G\lambda^{-1}L^2\beta_*V(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Векторы поляризации слабых разрывов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{S}$ можно аддитивно разложить по проекциям на касательные $\boldsymbol{\tau}$ и нормальные $\mathbf{n}$ направления к волновой поверхности Σ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{\perp}\boldsymbol{\tau} + A_{\parallel}\mathbf{n}, \quad \mathbf{S} = S_{\perp}\boldsymbol{\tau} + S_{\parallel}\mathbf{n}, \\ A_{\perp} &= \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad A_{\parallel} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}, \\ S_{\perp} &= \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad S_{\parallel} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки представлений (4) в систему (3) и группировки членов, содержащих касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$ и нормальный вектор $\mathbf{n}$, можно получить

$$\begin{cases} [(1+c_1)-\rho G^{-1}V^2]A_{\perp} + Lc'_4S_{\perp}\boldsymbol{\tau} + \\ + [(2-\rho G^{-1}V^2 + 2\nu(1-2\nu)^{-1})A_{\parallel} + L(c'_4+c'_5)S_{\parallel}]\mathbf{n} = 0, \\ [(1+c_2)-\rho \Im G^{-1}L^{-2}V^2]S_{\perp} + L^{-1}c'_5A_{\perp}\boldsymbol{\tau} + \\ + [(2-\rho \Im G^{-1}L^{-2}V^2 + 2c_3)S_{\parallel} + L^{-1}(c'_4+c'_5)A_{\parallel}]\mathbf{n} = 0, \\ B = -2VG\lambda^{-1}\alpha_*\frac{1+\nu}{1-2\nu}A_{\parallel} - 2VG\lambda^{-1}L^2\beta_*S_{\parallel}. \end{cases} \quad (5)$$

В силу линейной независимости векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ первые два уравнения системы (5) будут справедливы только в случае равенства нулю соответствующих коэффициентов при указанных векторах. Указанное обстоятельство позволяет получить условия распространения поверхностей слабых разрывов в полуизотропном твёрдом теле:

$$\begin{aligned} [(1+c_1)-\rho G^{-1}V^2]A_{\perp} + Lc'_4S_{\perp} &= 0, \\ [(1+c_2)-\rho \Im G^{-1}L^{-2}V^2]S_{\perp} + L^{-1}c'_5A_{\perp} &= 0, \\ (2(1-\nu)(1-2\nu)^{-1} - \rho G^{-1}V^2)A_{\parallel} + L(c_4+c_5)S_{\parallel} &= 0, \\ (2-\rho \Im G^{-1}L^{-2}V^2 + 2c_3)S_{\parallel} + L^{-1}(c_4+c_5)A_{\parallel} &= 0, \\ B + V2G\lambda^{-1}\alpha_*\frac{1+\nu}{1-2\nu}A_{\parallel} + V2G\lambda^{-1}L^2\beta_*S_{\parallel} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Давайте рассмотрим особо интересные для прикладных задач случаи. Следует отметить, что если при распространении поперечных волн, т. е. когда выполнены условия $A_{\perp} \neq 0$ и/или $S_{\perp} \neq 0$ и одновременно $A_{\parallel} = 0$ и $S_{\parallel} = 0$, то такая волна будет заведомо атермической, что немедленно следует из последнего уравнения в системе (6). Возможные скорости распространения такой поверхности будут равны

$$\sqrt{2} V_{\perp} = \sqrt{v_{\perp}^{\mu 2} + v_{\perp}^{\mu \mu 2} \pm \sqrt{4\rho^{-2}\mathfrak{T}^{-1}G^2L^2c_4'c_5' + (v_{\perp}^{\mu 2} - v_{\perp}^{\mu \mu 2})^2}},$$

где использованы обозначения

$$v_{\perp}^{\mu} = \sqrt{\rho^{-1}G(1+c_1)}, \quad v_{\perp}^{\mu \mu} = \sqrt{(\rho\mathfrak{T})^{-1}G(1+c_2)}.$$

В случае распространения по полуизотропному микрополярному термоупругому телу продольных волн, т. е. когда выполнены условия $A_{\parallel} \neq 0$ и $S_{\parallel} \neq 0$, условие атермичности таких волн $B = 0$ следует из последнего уравнения в системе (6) и записывается в виде

$$\frac{A_{\parallel}}{S_{\parallel}} = -L^2 \frac{\beta_*}{\alpha_*} \frac{1-2\nu}{1+\nu},$$

что накладывает ограничения на соответствующие нормальные проекции векторов поляризации спинорных и трансляционных перемещений к волной поверхности.

Возможные скорости распространения продольных волн будут равны

$$\sqrt{2} V_{\pm \parallel} = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\parallel}^{\mu \mu 2} \pm \sqrt{4(c_4' + c_5')^2 \rho^{-2}\mathfrak{T}^{-1}G^2L^2 + (v_{\parallel}^2 - v_{\parallel}^{\mu \mu 2})^2}},$$

где введены обозначения

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{G(2-2\nu)}{\rho(1-2\nu)}}, \quad v_{\parallel}^{\mu} = \sqrt{\frac{G(2-2\nu)}{\rho(1-2\nu)}}.$$

Заключение. В данной работе исследованы процессы распространения связанных слабых разрывов инкремента температуры, трансляционных и спинорных перемещений. Особое внимание уделено условиям атермичности волн, распространяющихся по полуизотропному микрополярному термоупругому континууму. Изучены слабые разрывы решений связанной системы уравнений в частных производных полуизотропной микрополярной термоупругости с применением геометрических и кинематических условий совместности Адамара – Томаса. Найдены скорости распространяющихся волновых поверхностей трансляционных и спинорных смещений. Получены соотношения между амплитудными факторами слабого разрыва температурного поля и векторами разрывов трансляционных и спинорных перемещений, характеризующих атермические волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nowacki, W. Theory of asymmetric elasticity. – Oxford: Pergamon Press, 1986. – 383 p.
2. Whitham, G. B. Linear and nonlinear waves. New York: John Wiley & Sons, 2011.
3. Бреховских, Л. М. Введение и механика сплошной среды (в приложении и теории волн) / Л. М. Бреховских, В. В. Гончаров. – М.: Наука, 1982. – 335 с.
4. Smith, A. C. Elastic wave propagation in noncentrosymmetric, isotropic media: dispersion and field equations. International Journal of Engineering Science. 1967. – Vol. 5. № 10. – P. 741-746.
5. Achenbach, J. D. Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. American Elsevier, Amsterdam, London, New York, 1973.
6. Lakes, R. Composites and metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.
7. Murashkin, E. V.; Radaev, Y. N. Coupled thermoelasticity of hemitropic media. pseudotensor formulation. Mechanics of Solids. – 2023. – Vol. 58. No. 3. – P. 802-813.
8. Мурашкин, Е. В. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела / Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – № 3 (57). – С. 112-128.
9. Мурашкин, Е. В. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел / Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – № 4 (58). – С. 86-120.

10. Murashkin, E. V.; Radayev, Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mechanics of Solids*. – 2023. – Vol. 58, №. 9. – P. 3111-3119.
11. Thomas, T. Y. *Plastic flow and fracture in solids*. New York, London: Academic Press, 1961.
12. Murashkin, E. V.; Radayev, Y. N. On strong and weak discontinuities of the coupled thermomechanical field in micropolar thermoelastic type-II continua. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]* 2014. № 4 (37). P. 85-97.
13. Ковалев, В. А. О слабых разрывах и уравнениях скачков на волновых поверхностях в микрополярных термоупругих континуумах / В. А. Ковалев, Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. – 2015. – Т. 15. – Вып. 1. – С. 79-89.
14. Murashkin, E. V.; Radayev, Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity. *Materials Physics and Mechanics*. – 2015. Vol. 23, № 1. P. 10-13.
15. Murashkin, E. V.; Stadnik, N. E. Compatibility conditions in continua with microstructure. *MATEC Web of Conferences*. – 2017. – Vol. 95.
16. Мурашкин, Е. В. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах / Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. – 2021. – № 2 (48). – С. 115-127.